РЕШЕНИЕ 7 КЛАСС

Задание 1.

Все вершины замкнутой ломаной линии лежат на одной окружности. Известно, что эта ломаная имеет пять звеньев. Какое количество точек самопересечения* она может иметь? Обоснуйте свой ответ. Проиллюстрируйте все варианты чертежами.

Примечание: под точкой самопересечения мы понимаем точки, в которых ломаная пересекает сама себя.

Баллы	Критерии (7 класс)
1	За каждый правильный ответ (рисунок) без самопересечения.
2	За каждый правильный ответ с самопересечением. Правильным ответом считается тот, что подтвержден чертежом.

Решение:

возможные варианты представлены на рис. 1

1) нет точек самопересечения;
2) одна точка самопересечения;
3) две точки самопересечения;
4) пять точек самопересечения.

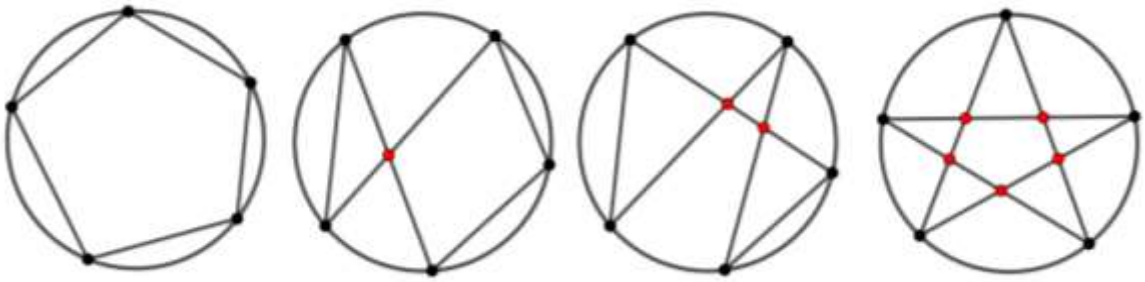


Рисунок 1

Задание 2.

На рисунке 2 показана начальная позиция игрального кубика (по центру) и его положения после одного переката через рёбра нижнего основания в четырёх возможных направлениях: вперед, назад, вправо, влево. На рисунке перекат вперёд обозначен символом V, назад – N, влево – L, вправо – P. Количество перекатов в указанном направлении задано числом, записанным сразу после символа, обозначающего направление.

Например, запись V1 означает, что игральный кубик перекатили вперёд один раз, а P3 – вправо три раза. Последовательность перекатывания кубика без отрыва от стола в разных направлениях, будет записана так: P1 V7 N5 – это означает, что кубик перекатили вправо один раз, вперёд семь раз и назад пять раз.

Исходное положение кубика показано на рисунке (по центру). Определите, какое число окажется на верхней грани кубика после следующей последовательности его перекатывании P2 L3 V5 N3.

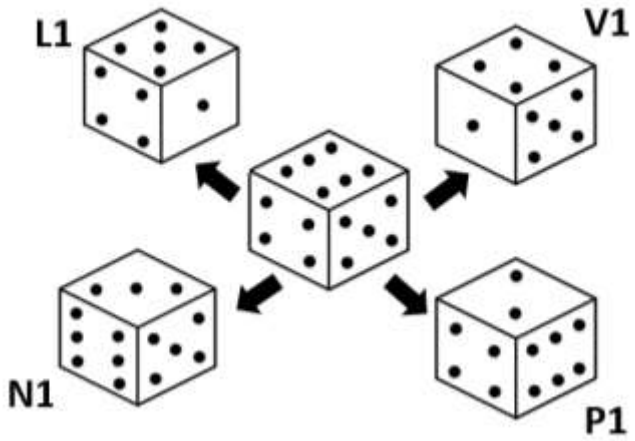


Рисунок 2

Баллы	Критерии (7 класс)
4	Дан правильный ответ без обоснований
8	Правильный ответ с обоснованием (рисунки, рассуждения)

Решение:

P2 L3 V5 N3=L1V2

Ответ: 2

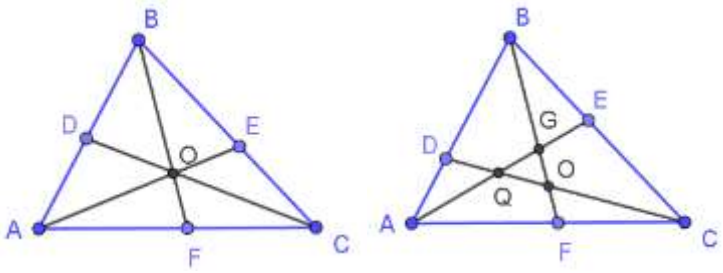
Задание 3.

В треугольнике ABC на каждой стороне отмечены точки D, E и F. Сколько треугольников получится, если соединить отрезками точки D, E и F с противоположными вершинами треугольника?

Баллы	Критерии
2	Представлено два варианта разбиения, указано количество треугольников больше 7 и 8 соответственно или дан верный ответ без объяснений.
5	Представлен один вариант разбиения и правильно указано количество треугольников перечислением или описанием алгоритма поиска.
6	Представлено два варианта разбиения и правильно указано количество треугольников перечислением или описанием алгоритма поиска в одном варианте.
8	Представлено два варианта разбиения и правильно указано количество треугольников перечислением или описанием алгоритма поиска без данного треугольника.
10	Представлено два варианта разбиения и правильно найдены все треугольники перечислением или описанием алгоритма поиска.

Решение:

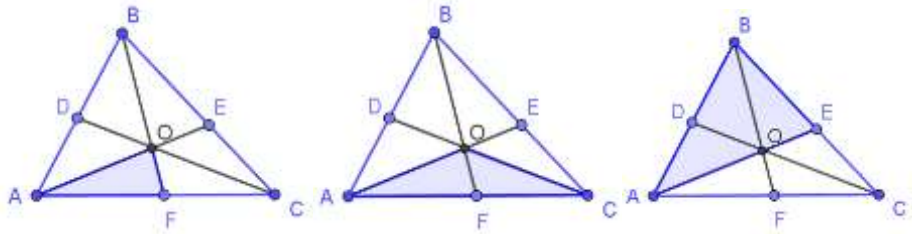
Возможны 2 случая (рис. 3):



а *б*

Рисунок 3

1) Отрезки пересекаются в одной точке O (рис. 3а). Подсчитаем отдельно количество “маленьких” треугольников (рис. 4а), “средних” треугольников (рис. 4б), состоящих из двух “маленьких” и “больших” (рис. 4в), состоящих из трёх “маленьких”. Количество “маленьких” треугольников — 6, “средних” — 3, “больших” — 6 и ещё один — исходный ΔABC. Итого: 6 + 3 + 6 + 1= 16. Перечислим: ΔADO, ΔAFO, ΔBDO, ΔBEO, ΔCEO, ΔCFO, ΔABO, ΔACO, ΔBCO, ΔABE, ΔACE, ΔABF, ΔACD, ΔBCF, ΔBCD, ΔABC.



а) “маленький” б) ”средний” в) ”большой”

Рисунок 4

2) Отрезки пересекаются в трёх точках G, O, Q (рис. 3б). 17 треугольников: *ABC, ADE, AEC, ABF, ADC, ADK, ABM, AKC, AMF, BFC, DBC, BME, NFC, BNC, KMN, DBN, EKC*. Здесь можно применить такой способ подсчёта: треугольники без учета ΔABC с вершиной A — 8 (рис. 5), с вершиной B без вершины A — (8 – 3) = 5, с вершиной C без A и B — (8 – 6) = 2, центральный ΔGOQ и данный ΔABC. Итого: 8 + 5 + 2 + 1 + 1 = 17.

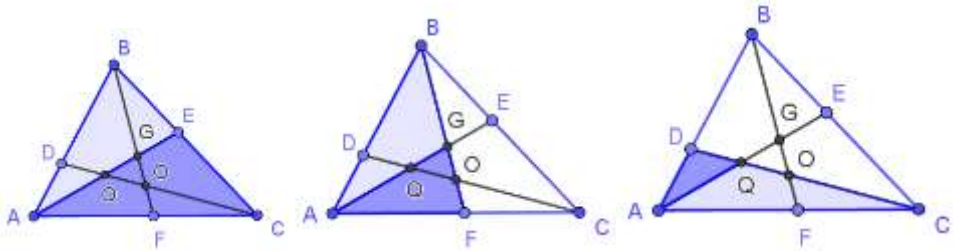


Рисунок 5 - Треугольники с вершиной в точке A

Задание 4.

Постройте в GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) модель часов с круглым циферблатом, которые показывают время 15 часов 20 минут.

Баллы	Критерии (7 класс)
2	Построен схематический чертеж.
5	Построена окружность и поделена на 12 равных частей в GeoGebra, с помощью циркуля и линейки, с использованием координатной сетки или транспортира.
7	Построена окружность и поделена на 12 равных частей, верно указано положение одной стрелки.
10	Верно построена модель часов со стрелками или верно построен чертеж с помощью циркуля и линейки или с использованием координатной сетки или транспортира.

Решение:

За 20 минут минутная стрелка пробежит 120° (на 360°/60 минут = 6° минутная стрелка поворачивается за 1 минуту), а часовая стрелка сдвигается на 10° (расстояние между часовыми делениями на циферблате равно 360°/12 = 30°, 30°/60 минут = 0,5° в

минуту). Всего часовая стрелка сдвинется на 90° + 10°. Угол между стрелками равен 120° – 100° = 20°.

Пример алгоритма построения модели часов в GeoGebra (рис. 6):

1) Построить правильный 12-угольник, скрыть его стороны.
2) Построить его центр.
3) Построить окружность по данному центру и вершине многоугольника.
4) Построить окружность по данному центру и точке внутри окружности.
5) На окружностях отметить по точке. Окружности скрыть.
6) Построить векторы с началом в центре окружности и концом в данных точках. Это минутная и часовая стрелки.
7) Измерить угол между часовой и минутной стрелками.

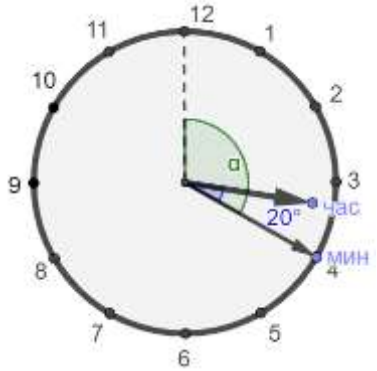


Рисунок 6

Ответ: 20°

Задание 5. *(Задача предложена М.В. Шабановой)*

Дан равносторонний треугольник ABC. На сторонах этого треугольника, вне его построены неравнобедренные произвольные, но равные друг другу треугольники ABD, CAE, BCF (последовательность букв в записи названий треугольников указывает на соответственно равные элементы, например, BD=AE=CE). Вершины D, E и F соединены отрезками. В результате получен треугольник DEF. Какими свойствами должны обладать треугольники ABD, CAE, BCF, чтобы стороны треугольника DEF были параллельны сторонам треугольника ABC?

Баллы	Критерии (7 класс)
5	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи без учета условия параллельности, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Выводы не сделаны
10	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи с учетом условия параллельности, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Выводы не сделаны
15	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи с учетом условия параллельности, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Сделан один из выводов: 1) один из углов треугольников *ABD*, *CAE* и *BCF* равен 150°; 2) вершины *D*, *E* и *F* лежат на продолжении медиан (биссектрис, высот) треугольника *ABC*
20	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи с учетом условия параллельности, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Сделан один из выводов: 1) один из углов треугольников *ABD*, *CAE* и *BCF* равен 150°; 2) вершины *D*, *E* и *F* лежат на продолжении медиан (биссектрис, высот) треугольника *ABC*. Приведено доказательство полученного вывода

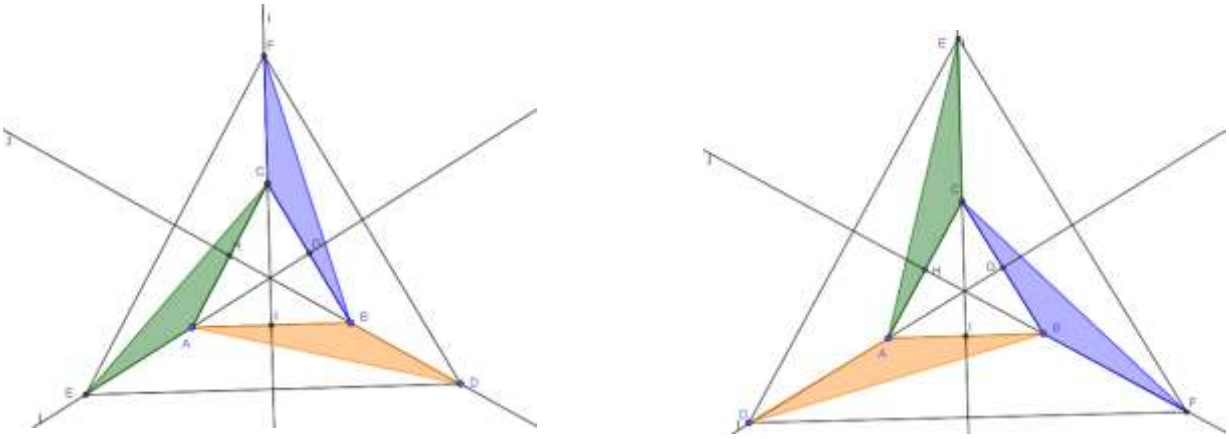
Решение:

Построение:

Для создания динамической модели геометрической конфигурации, описанной в условии, инструментом «Правильный многоугольник» строим равносторонний треугольник *ABC*. Затем на одной из его сторон инструментом «Многоугольник» строим произвольный треугольник (пусть для определенности это треугольник *ABD*). Треугольники, равные *ABD*, строим на остальных сторонах по правилам построения треугольника циркулем и линейкой по трем заданным сторонам. Для этого требуются инструменты «Окружность по центру и радиусу» и «Пересечение». Соединяем отрезками точки *E*, *F*, *D* с помощью инструмента «Отрезок» или строим на этих точках треугольник инструментом «Многоугольник».

Поисковый эксперимент:

Перемещаем свободную точку *D* и наблюдаем за взаимным расположением сторон треугольников *ABC* и *EFD*. Эксперименты с динамической моделью показывают, что стороны треугольников *ABC* и *EFD* параллельны в трех случаях, два из которых могут удовлетворять условию «построенные треугольники *ABD*, *CAE* и *BCF* неравнобедренные» (рис. 7 *а* и *б*).



а б

Рисунок 7

Дополнительно проводим прямые, содержащие медианы треугольника *ABC*. Их построение подсказывает вывод о том, что стороны треугольника *EFD* параллельны сторонам треугольника *ABC*, когда вершины треугольника *EFD* лежат на этих прямых (свойство 1). В этом случае углы при вершинах *A*, *B* и *C* треугольников *ABD*, *CAE* и *BCF* равны 150° (свойство 2).

Доказательство

Пусть треугольники *ABD*, *CAE* и *BCF* таковы, что вершины *D*, *E* и *F* лежат на прямых, содержащих медианы треугольника *ABC*, проходящие через вершины *B*, *A* и *C* равностороннего треугольника *ABC* соответственно (рис. 7 *а*). Докажем, что в этом случае стороны треугольников *ABC* и *EFD* параллельны.

1. $BD = AE = CF$ по условию, точки *D*, *E* и *F* лежат на прямых, содержащих медианы треугольника *ABC*, следовательно треугольник *EFD* равносторонний.

2. Все углы равностороннего треугольника равны 60°, а его медианы являются биссектрисами. Следовательно, соответствующие углы, при парах прямых *AB* и *ED*, *AC* и *EF*, *CB* и *FD* и секущих *BD*, *EA* и *CF* соответственно равны. Таким образом, *AB* || *ED*, *AC* || *EF*, *CB* || *FD*.

3. $\angle DBA = \angle EAC = \angle FCB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ как смежные с половинами соответствующих углов равностороннего треугольника *ABC*.

При выборе расположения, представленного на рисунке 7 б, доказательство аналогично

Ответ: вершины треугольников лежат на медианах треугольника *ABC*, треугольники имеют угол равный 150°.

Задание 6.

Изменяя чертеж к задаче №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии (7 класс)
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5.
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная.
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5.
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа.

Примеры задач:

1) Дан равносторонний треугольник ABC. На сторонах этого треугольника, вне его построены *равнобедренные* произвольные, но равные друг другу треугольники ABD, CAE, BCF (последовательность букв в записи названий треугольников указывает на соответственно равные элементы, например, BD=AE=CE). Вершины D, E и F соединены отрезками. В результате получен треугольник DEF. Какими свойствами должны обладать треугольники ABD, CAE, BCF, чтобы стороны треугольника DEF были параллельны сторонам треугольника ABC?
2) Дан *равнобедренный* треугольник ABC. На сторонах этого треугольника, вне его построены неравнобедренные произвольные, но равные друг другу треугольники ABD, CAE, BCF (последовательность букв в записи названий треугольников указывает на соответственно равные элементы, например, BD=AE=CE). Вершины D, E и F соединены отрезками. В результате получен треугольник DEF. Какими свойствами должны обладать треугольники ABD, CAE, BCF, чтобы стороны треугольника DEF были параллельны сторонам треугольника ABC?