РЕШЕНИЕ 8 КЛАСС

Задание 1.

Все вершины замкнутой ломаной линии лежат на одной окружности. Известно, что эта ломаная имеет шесть звеньев. Какое количество точек самопересечения* она может иметь? Обоснуйте свой ответ. Проиллюстрируйте все варианты чертежами.

Примечание: под точкой самопересечения мы понимаем точки, в которых ломаная пересекает сама себя.

Баллы	Критерии (8 класс)
1	За каждый правильный ответ с самопересечением. Правильным ответом считается тот, что подтвержден чертежом.

Решение:

возможные варианты представлены на рис. 1.

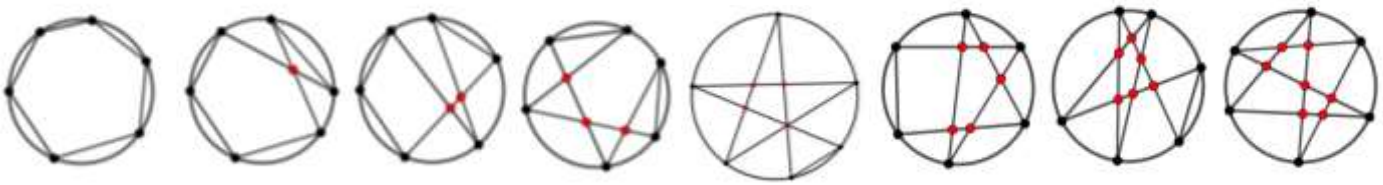


Рисунок 1

Задание 2.

На рисунке 2 показана начальная позиция игрального кубика (по центру) и его положения после одного переката через рёбра нижнего основания в четырёх возможных направлениях: вперед, назад, вправо, влево. На рисунке перекат вперёд обозначен символом V, назад – N, влево – L, вправо – P. Количество перекатов в указанном направлении задано числом, записанным сразу после символа, обозначающего направление.

Например, запись V1 означает, что игральный кубик перекатили вперёд один раз, а P3 – вправо три раза. Последовательность перекатывания кубика без отрыва от стола в разных направлениях, будет записана так: P1 V7 N5 – это означает, что кубик перекатили вправо один раз, вперёд семь раз и назад пять раз.

Исходное положение кубика показано на рисунке (по центру). Определите, какое число окажется на верхней грани кубика после следующей последовательности его перекатывании P22 V55 L33 N12.

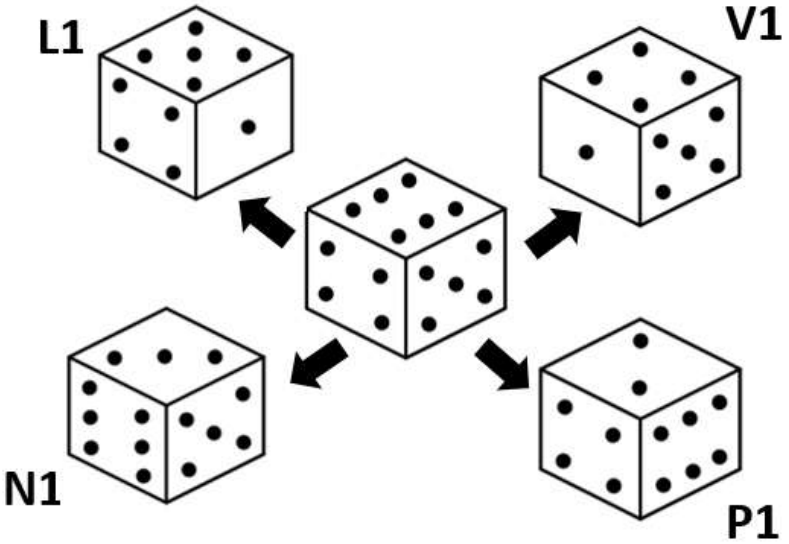


Рисунок 2

Баллы	Критерии (8 класс)
4	Дан правильный ответ без обоснований
8	Правильный ответ с обоснованием (рисунки, рассуждения)

Решение:

P22 V55 L33 N12= P2V3L1

Ответ: 2

Задание 3.

В треугольнике ABC на каждой стороне отмечены точки D, E и F. Сколько треугольников и сколько четырехугольников получится, если соединить отрезками точки D, E и F с противоположными вершинами треугольника?

Баллы	Критерии (8 класс)
по 1 баллу	1) Приведен вариант разбиения 2) Верно указано количество треугольников перечислением или описанием алгоритма поиска. 3) Верно указано количество выпуклых четырехугольников перечислением или описанием алгоритма поиска.
2	Верно указано количество невыпуклых четырехугольников перечислением или описанием алгоритма поиска.
10	Представлено два варианта разбиения и правильно указано количество треугольников и четырехугольников перечислением или описанием алгоритма поиска.

Возможны 2 случая:

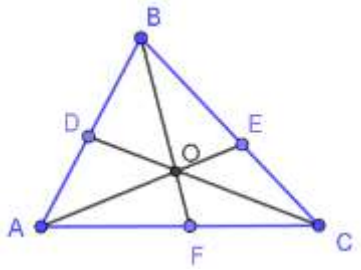


Рисунок 3а

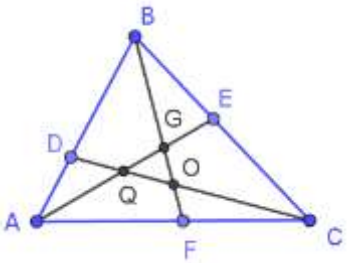


Рисунок 3б

1) **Отрезки пересекаются в одной точке O (рис. 2а).** Подсчитаем отдельно количество “маленьких” треугольников, “средних” треугольников, состоящих из двух “маленьких” и “больших”, состоящих из трёх “маленьких” (рис. 4). Количество “маленьких” треугольников — 6, “средних” — 3, “больших” — 6 и ещё один — исходный ΔABC. Итого: 6 + 3 + 6 + 1= 16. Перечислим: ΔADO, ΔAFO, ΔBDO, ΔBEO, ΔCEO, ΔCFO, ΔABO, ΔACO, ΔBCO, ΔABE, ΔACE, ΔABF, ΔACD, ΔBCF, ΔBCD, ΔABC. Четырёхугольников всего 6: 3 выпуклых — *ADOF, BDOE, CEOF* и 3 невыпуклых — *ABOC, BCOA, CAOB*.

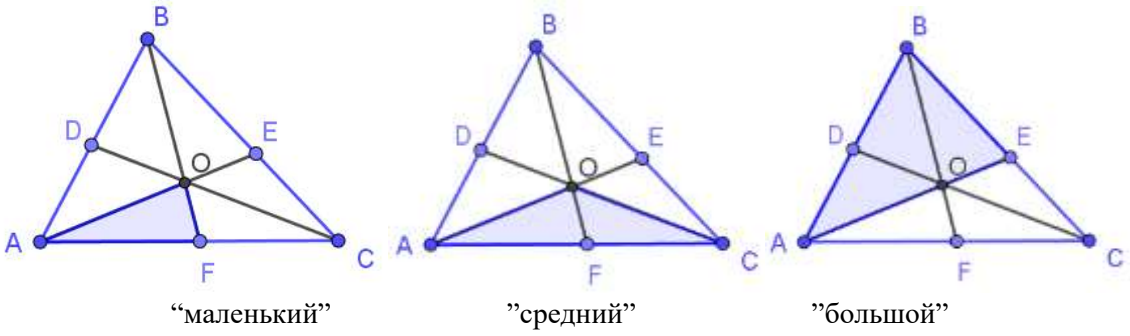


Рисунок 4

2) **Отрезки пересекаются в трёх точках G, O, Q (рис. 3б).** 17 треугольников: *ABC,*

ABE, AEC, ABF, ABG, AGF, ADC, ADQ, AQC, BFC, BCD, BGE, BOC, BDO, COF, CEQ, GOQ. Здесь можно применить такой способ подсчёта: треугольники без учета ΔABC с вершиной A — 8 (рис. 5), с вершиной B без вершины A — 8 – 3, с вершиной C без A и B — 8 – 6, центральный ΔGOQ и данный ΔABC. Итого: 8 + 5 + 2 + 1 + 1 = 17.

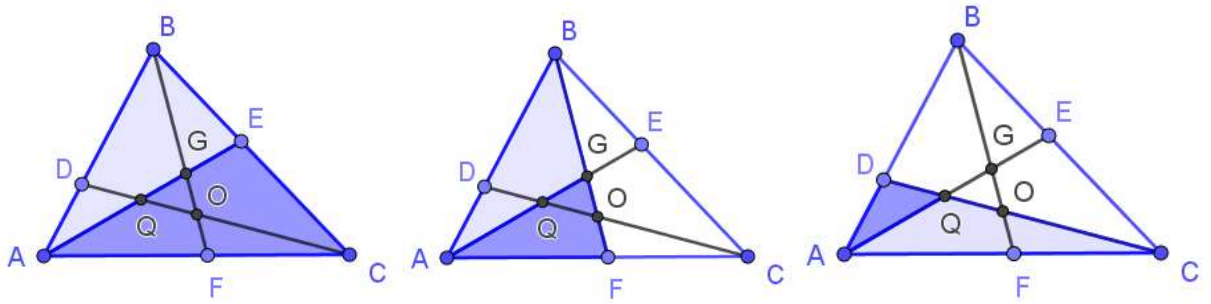


Рисунок 5 - Треугольники с вершиной в точке A

Четырёхугольников всего 12: 3 выпуклых “маленьких” — *AQOF, BDQG, CEGO, 3* выпуклых “больших” — *ADOF, BDQE, CEGF,* 3 невыпуклых “маленьких” — *ABOC, BCOA, CAOB* и 3 невыпуклых “больших” — *ABOC, BCQA, CBGA.*

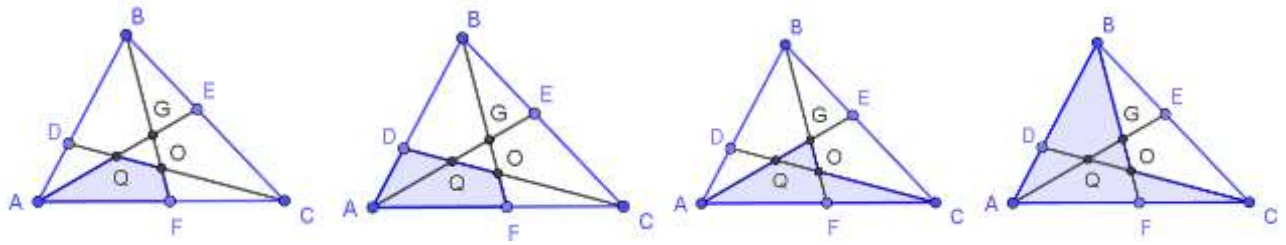


Рисунок 6 - Четырёхугольники с вершиной в точке A

Ответ: 1) 16 треугольников и 6 четырёхугольников;
2) 17 треугольников и 12 четырёхугольников.

Задание 4.

Постройте в GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) динамическую модель часов с круглым циферблатом, угол между минутной и часовой стрелками которых постоянный и равен 2º. Приведите пример времени (в часах и минутах), которое могут правильно показать такие часы.

Баллы	Критерии (8 класс)
2	Построен схематический чертеж и для одного варианта приведен пример времени (в часах и минутах), которое могут правильно показать такие часы.
5	Построена окружность и поделена на 12 равных частей в GeoGebra, с помощью циркуля и линейки, с использованием координатной сетки и транспортира. Для одного варианта приведен пример времени (в часах и минутах), которое могут правильно показать такие часы (возможно, результат получен экспериментально).
7	Построена окружность, поделена на 12 равных частей, для нескольких вариантов приведены примеры времени (в часах и минутах), которое могут правильно показать такие часы (возможно, результат получен экспериментально).
10	Верно построена модель часов со стрелками и аналитически найдены все решения задачи.

Решение: Пусть искомое положение стрелок x часов и y минут ($x < 12$, $y < 60$).

За y минут минутная стрелка пробежит 6y° (на 360°/60 минут = 6° минутная стрелка поворачивается за 1 минуту), а часовая стрелка сдвигается на 0,5y° (расстояние между

часовыми делениями на циферблате равно 360°/12 = 30°, 30°/60 минут = 0,5° в минуту). Всего часовая стрелка сдвинется на $30x° + 0{,}5y°$.

Угол между стрелками равен 2°, поэтому $6y – (30x + 0{,}5y) = 2$ или $(30x + 0{,}5y) – 6y = 2$.

$5{,}5y – 30x = \pm 2$ или $11y – 60x = \pm 4$. Решая уравнение в целых числах, получим решение $x = 3$, $y = 16$ или $x = 8$, $y = 44$.

Ответ: 3 часа 16 минут или 8 часов 44 минуты.

Пример алгоритма построения модели часов в GeoGebra (рис. 7):

1) Построить правильный 12-угольник, скрыть его стороны
2) Построить его центр.
3) Построить окружность по данному центру и вершине многоугольника.
4) Построить окружность по данному центру и точке внутри окружности.
5) На окружностях отметить по точке. Окружности скрыть.
6) Построить векторы с началом в центре окружности и концом в данных точках. Это минутная и часовая стрелки.
7) Измерить угол между часовой и минутной стрелками.

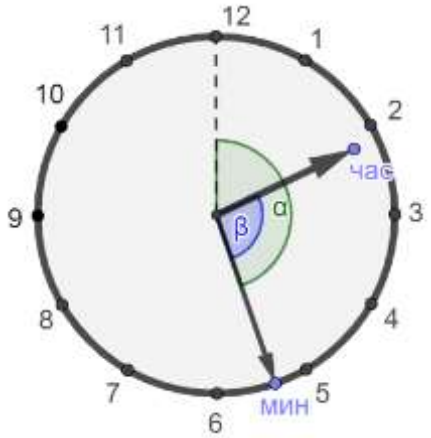


Рисунок 7

Задание 5.

Постройте произвольный параллелограмм ABCD. На сторонах вне его постройте равносторонние треугольники. Соедините центры этих треугольников.

а) Определите вид полученной фигуры. Обоснуйте свой вывод.

б) Опишите свойства, которыми должен обладать параллелограмм ABCD, чтобы полученная в результате описанных построений фигура оказалась прямоугольником. Обоснуйте свой вывод.

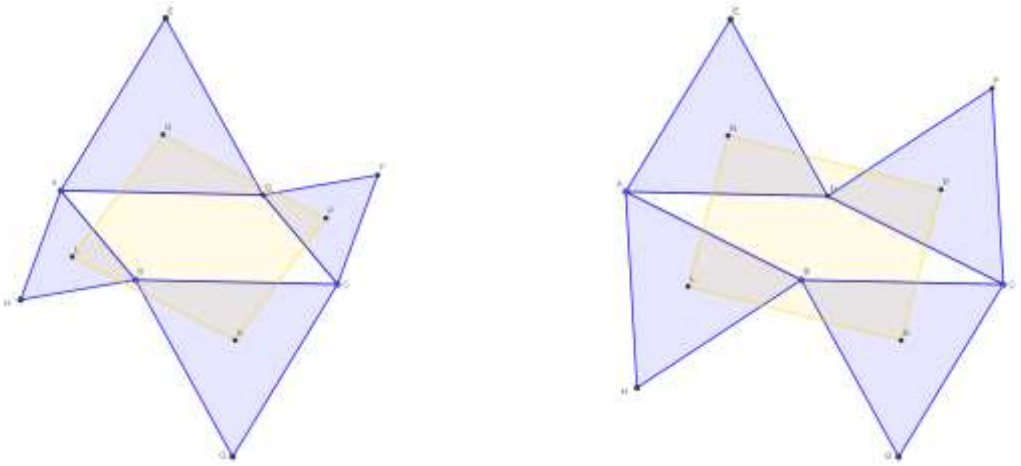
Баллы	Критерии (8 класс)
4	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи (*ABCD* не является ромбом), компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Выводы не сделаны
8	Компьютерными инструментами верно построена конфигурация, описанная в условии задачи (*ABCD* является динамически устойчивым ромбом). Выводы не сделаны ИЛИ В построенной циркулем и линейкой конфигурации *ABCD* является ромбом. Выводы не сделаны
12	Компьютерными инструментами верно построена конфигурация, описанная в условии задачи (*ABCD* является динамически устойчивым ромбом). Сделан один из выводов, соответствующий пункту *а* или *б* ИЛИ В построенной циркулем и линейкой конфигурации *ABCD* является ромбом. Сделан

	один из выводов, соответствующий пункту *а* или *б*
16	Компьютерными инструментами верно построена конфигурация, описанная в условии задачи (*ABCD* является динамически устойчивым ромбом). Сделаны оба вывода, соответствующие пунктам *а* и *б* ИЛИ В построенной циркулем и линейкой конфигурации *ABCD* является ромбом. Сделаны оба вывода, соответствующие пунктам *а* и *б*
20	Компьютерными инструментами верно построена конфигурация, описанная в условии задачи (*ABCD* является динамически устойчивым ромбом). Обоснованы оба вывода, соответствующие пунктам *а* и *б* ИЛИ В построенной циркулем и линейкой конфигурации *ABCD* является ромбом. Обоснованы оба вывода, соответствующие пунктам *а* и *б.*

Решение:

Построение

Для получения динамически устойчивой модели параллелограмма *ABCD* инструментом «Точка» строим три произвольные точки *A*, *B* и *C*, соединяем их отрезками с помощью инструмента «Отрезок». Инструментом «Параллельная прямая» строим прямые, проходящие через точки *A* и *B* параллельные построенным отрезкам. Инструментом «Пересечение» отмечаем точку *D* как пересечение построенных прямых. Инструментом «Правильный многоугольник» строим правильные треугольники на сторонах параллелограмма. Инструментом «Середина или центр» отмечаем центры равносторонних треугольников – точки *N*, *P*, *K*, *L*. Инструментом «Многоугольник» строим многоугольник с вершинами в этих точках (рис. 8*а*).



а *б*

Рисунок 8

Поисковый эксперимент

Перемещаем точку *A* до получения фигуры, похожей на прямоугольник (рис. 8*б*). Для уточнения условий, при которых четырехугольник *NPKL* становится прямоугольником, строим дополнительно диагонали четырехугольников *ABCD* и *NPKL* (рис. 9).

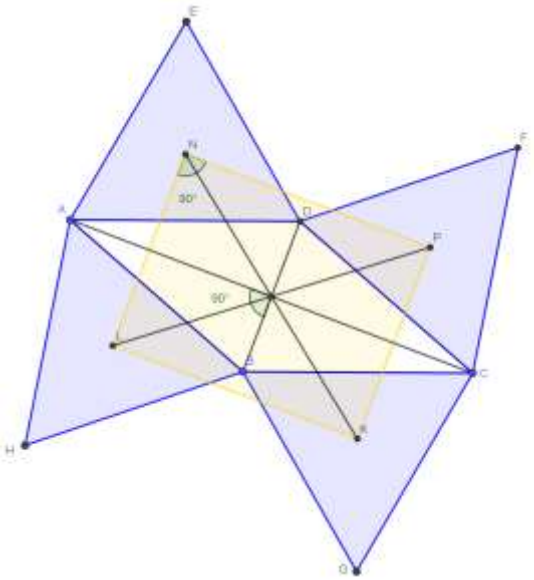


Рисунок 9

Эксперимент позволяет выдвинуть гипотезу о том, что *NPKL* прямоугольник при условии, что *ABCD* – ромб.

Доказательство

Пусть *ABCD* – ромб, так как все стороны ромба равны, то равносторонние треугольники, построенные на его сторонах равны. Точка пересечения диагоналей *ABCD* – центр симметрии ромба. Точки *N* и *K*, *L* и *P* симметричны относительно этого центра. Следовательно, *NKLP* – параллелограмм, стороны которого параллельны диагоналям ромба. Диагонали ромба перпендикуляры, следовательно, *NKLP* – прямоугольник.

Ответ: а) параллелограммом; б) ромбом.

Задание 6.

Изменяя чертеж к задаче №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии (8 класс)
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5.
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная.
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5.
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа.

Примеры задач:

1. Постройте произвольный ***ромб*** ABCD. На сторонах вне его постройте равносторонние треугольники. Соедините центры этих треугольников.

а) Определите вид полученной фигуры. Обоснуйте свой вывод.

б) Опишите свойства, которыми должен обладать ***ромб*** ABCD, чтобы полученная в результате описанных построений фигура оказалась прямоугольником. Обоснуйте свой вывод.

2. Постройте произвольный параллелограмм ABCD. На сторонах вне его постройте **квадраты**. Соедините центры этих треугольников.

а) Определите вид полученной фигуры. Обоснуйте свой вывод.

б) Опишите свойства, которыми должен обладать параллелограмм ABCD, чтобы полученная в результате описанных построений фигура оказалась прямоугольником. Обоснуйте свой вывод.