Решение 9 КЛАСС

Задание 1.

Все вершины замкнутой ломаной линии лежат на одной окружности. Известно, что эта ломаная имеет семь звеньев. Какое количество точек самопересечения* она может иметь? Обоснуйте свой ответ. Проиллюстрируйте все варианты чертежами.

Примечание: под точкой самопересечения мы понимаем точки, в которых ломаная пересекает сама себя.

Баллы	Критерии (9 класс)
1	За каждый правильный ответ (рисунок). Правильным ответом считается тот, что подтвержден чертежом.

Решение:

возможные варианты представлены на рис. 1

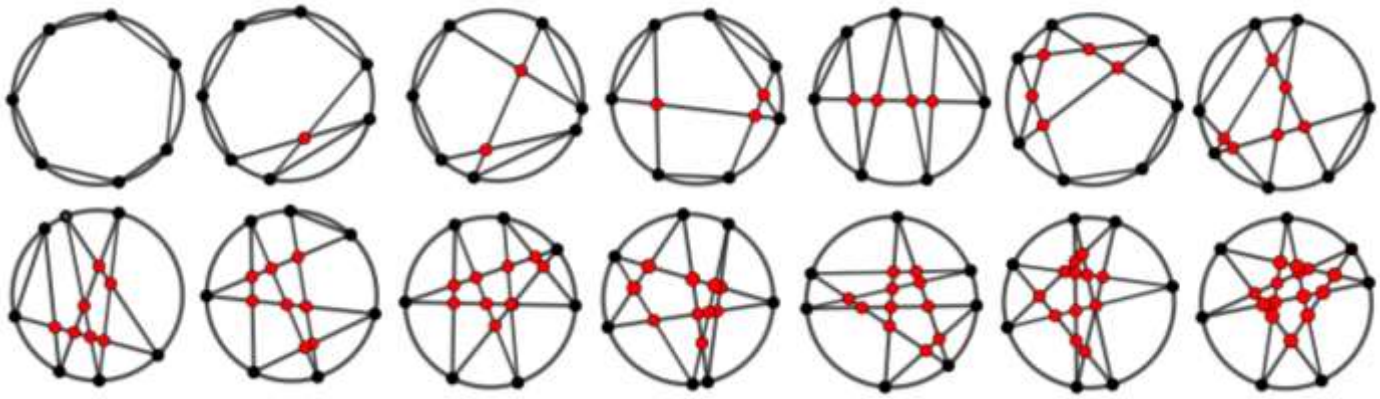

Рисунок 1

Задание 2.

На рисунке 2 показана начальная позиция игрального кубика (по центру) и его положения после одного переката через рёбра нижнего основания в четырёх возможных направлениях: вперед, назад, вправо, влево. На рисунке перекат вперёд обозначен символом V, назад – N, влево – L, вправо – P. Количество перекатов в указанном направлении задано числом, записанным сразу после символа, обозначающего направление.

Например, запись V1 означает, что игральный кубик перекатили вперёд один раз, а P3 – вправо три раза. Последовательность перекатывания кубика без отрыва от стола в разных направлениях, будет записана так: P1 V7 N5 – это означает, что кубик перекатили вправо один раз, вперёд семь раз и назад пять раз.

Исходное положение кубика показано на рисунке (по центру). Определите, какое число окажется на верхней грани кубика после следующей последовательности его перекатывании P2 V15 L30 N100.

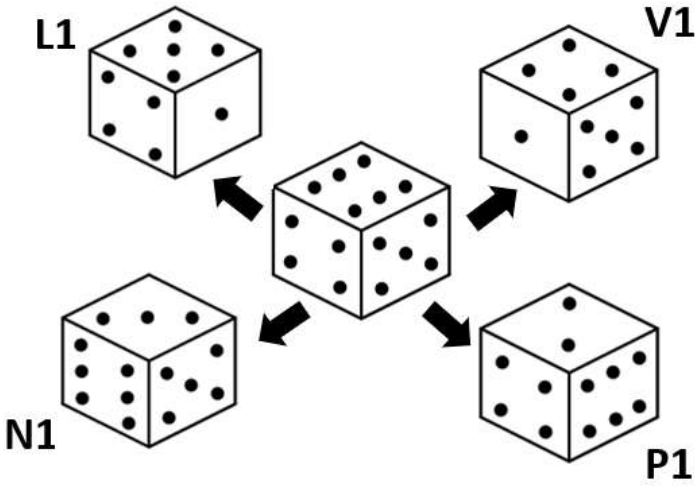

Рисунок 2

Баллы	Критерии (9 класс)
4	Дан правильный ответ без обоснований
8	Правильный ответ с обоснованием (рисунки, рассуждения)

Решение:

P2 V15 L30 N100 = P2V3L2

Ответ: 4

Задание 3

В треугольнике ABC на каждой стороне отмечены точки D, E и F. Сколько треугольников получится, если соединить отрезками точки D, E и F с противоположными вершинами треугольника и между собой?

Баллы	Критерии (9 класс)
2	Представлено два варианта разбиения, но неверно подсчитано количество треугольников.
5	Представлен один вариант разбиения и правильно сосчитаны все треугольники перечислением или описанием алгоритма поиска.
6	Представлено два варианта разбиения и правильно найдены треугольники перечислением или описанием алгоритма поиска. в одном варианте.
10	Представлено два варианта разбиения и правильно найдены все треугольники перечислением или описанием алгоритма поиска.

Возможны 2 случая:

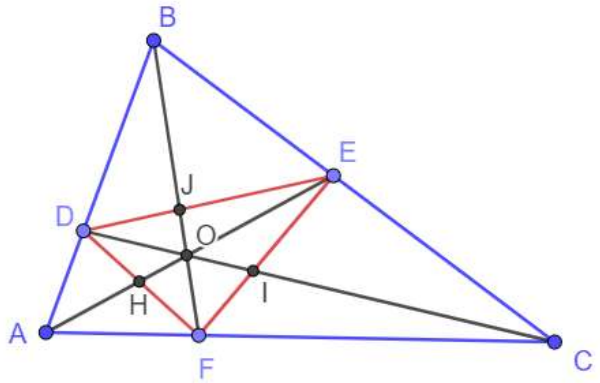

Рисунок 2а

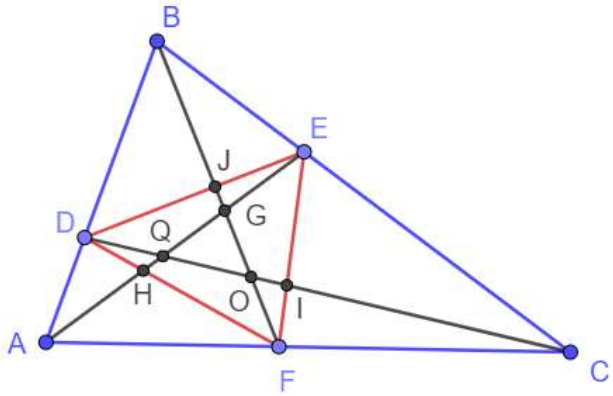

Рисунок 2б

1. В первом случае (рис. 2а) количество треугольников без соединения точек *D*, *E* и *F* между собой — 16. Сосчитаем количество треугольников, стороны которых содержат красные отрезки:
   А) Рассмотрим отрезок *DF*. С основанием *DF* имеем 7 треугольников с вершинами *A, B, C, E, I, J, O.* С основанием *DH* имеем 3 треугольника с вершинами *A, E* и *O*. С основанием *HF* также имеем 3 треугольника с вершинами *A*, *E* и *O*. Получили 7 + 3 + 3 = 13 треугольников.
   Б) Аналогично рассматривая отрезок *DE*, получим 13 треугольников, три из которых (*DJF, DEH, DEF*) уже посчитаны в случае А). Получаем 13 – 3 = 10.
   В) Рассмотрим отрезок *EF*. Здесь тоже 13 треугольников, но из них 5 уже посчитаны в случаях А) и Б). Получаем 13 – 5 = 8.
   Итого: 16 + 13 + 10 + 8 = 47.
2. Во втором случае (рис. 2б) количество треугольников без соединения точек *D*, *E* и *F* между собой — 17. Сосчитаем количество треугольников, стороны которых содержат красные отрезки.
   А) Рассмотрим отрезок *DF*. С основанием *DF* имеем 7 треугольников с вершинами *A, B, C, E, I, J, O.* С основанием *DH* имеем 3 треугольника с вершинами *A, E* и *Q*. С основанием *HF* также имеем 3 треугольника с вершинами *A*, *E* и *G*.
   Получили 7 + 3 + 3 = 13 треугольников.
   Б) Аналогично рассматривая отрезок *DE*, получим 13 треугольников, три из которых (*DJF, DEH, DEF*) уже посчитаны в случае А).
   Получаем 13 – 3 = 10 треугольников.
   В) Рассмотрим отрезок *EF*. Здесь тоже 13 треугольников, но из них 5 уже посчитаны в случаях А) и Б). Получаем 13 – 5 = 8. Ещё один треугольник – центральный *GOQ*.
   Итого: 16 + 13 + 10 + 8 + 1 = 48.

Ответ: 47; 48.

Задание 4.

Постройте в GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) динамическую модель часов с круглым циферблатом, угол между минутной и часовой стрелками которых постоянный и равен 129,5º. Приведите пример времени (в часах и минутах), которое могут правильно показать такие часы.

Баллы	Критерии (9 класс)
2	Построен схематический чертеж и для одного варианта приведен пример времени (в часах и минутах), которое могут правильно показать такие часы.
5	Построена окружность и поделена на 12 равных частей в GeoGebra, с помощью циркуля и линейки, с использованием координатной сетки и транспортира. Для одного варианта приведен пример времени (в часах и минутах), которое могут правильно показать такие часы (возможно, результат получен экспериментально).
7	Построена окружность, поделена на 12 равных частей, для нескольких вариантов приведены примеры времени (в часах и минутах), которое могут правильно показать такие часы (возможно, результат получен экспериментально).
10	Верно построена модель и аналитически найдены все решения задачи.

Решение: Пусть искомое положение стрелок x часов и y минут ($x < 12$, $y < 60$).

За y минут минутная стрелка пробежит 6y° (на 360°/60 минут = 6° минутная стрелка поворачивается за 1 минуту), а часовая стрелка сдвигается на 0,5y° (расстояние между часовыми делениями на циферблате равно 360°/12 = 30°, 30°/60 минут = 0,5° в минуту). Всего часовая стрелка сдвинется на $30x° + 0{,}5y°$.

Угол между стрелками равен 129,5°, поэтому $6y - (30x + 0{,}5y) = 129{,}5$ или $(30x + 0{,}5y) - 6y = 129{,}5$.

$5{,}5y - 30x = \pm 129{,}5$ или $11y - 60x = \pm 259$. Решая уравнение в целых числах, получим решение $x = 1$, $y = 29$ или x = 10, y = 31.

Ответ: 1 час 29 минут или 10 часов 31 минута.

Пример алгоритма построения модели часов в GeoGebra:

1) Построить правильный 12-угольник, скрыть его стороны
2) Построить его центр.
3) Построить окружность по данному центру и вершине многоугольника.
4) Построить окружность по данному центру и точке внутри окружности.
5) На окружностях отметить по точке. Окружности скрыть.
6) Построить векторы с началом в центре окружности и концом в данных точках. Это минутная и часовая стрелки.
7) Измерить угол между часовой и минутной стрелками.

Задание 5 *(задача предложена Р. Николаевым).*

ABCD – прямоугольник. Окружность с центром O_1 и радиусом 1 см находится внутри прямоугольника и касается его сторон AB и AD. Окружность с центром O_2 и радиусом 4 см находится внутри прямоугольника и касается сторон DC и CB. В каких пределах могут изменяться длины сторон прямоугольника ABCD, если известно, что расстояние между центрами O_1 и O_2 равно 5 см?

Ответ: от 8 см до 9 см.

Баллы	Критерии (9 класс)
5	Компьютерными инструментами или циркулем и линейкой построено изображение прямоугольника, в противоположные углы которого вписаны окружности, касающиеся внешним образом
10	Компьютерными инструментами или циркулем и линейкой построено изображение прямоугольника, в противоположные углы которого вписаны окружности, касающиеся внешним образом. Правильно определена одна из искомых границ. Нет обоснования
15	Компьютерными инструментами или циркулем и линейкой построено изображение прямоугольника, в противоположные углы которого вписаны окружности, касающиеся внешним образом. Правильно определены обе искомые границы. Нет обоснования
20	Компьютерными инструментами или циркулем и линейкой построено изображение прямоугольника, в противоположные углы которого вписаны окружности, касающиеся внешним образом. Обосновано определены обе искомые границы

Решение

Построение

Строим прямой угол DAB (D и B – произвольные фиксированные точки на сторонах прямого угла). По условию в этот угол вписана окружность $(O_1; 1)$, значит, точка O_1 лежит на биссектрисе угла DAB. Строим биссектрису угла DAB.

По теореме Пифагора $AO_1 = \sqrt{2}$. Строим точку O_1 как точку пересечения окружности $(A; \sqrt{2})$ и биссектрисы угла *DAB*.

Расстояние между O_1 и O_2 центрами окружностей по условию равно 5, и сумма их радиусов этих окружностей равна 5, следовательно, окружности касаются внешним образом. Центры касающихся окружностей и точка их касания лежат на одной прямой. Отмечаем точку касания окружностей как произвольную точку *K* на окружности $(O_1; 1)$. Строим луч O_1K и на нем точку O_2 как точку пересечения этого луча с окружностью $(K; 4)$. Затем строим окружность $(O_2; 4)$. Через точки *D* и *B* проводим перпендикуляры соответственно к прямым *AD* и *AB*. Точку их пересечения обозначим *C*.

Эксперимент

Меняем положение точки *K* так, чтобы окружность $(O_2; 4)$ касалась одного из лучей *AD* или *AB*, и подбираем расположение точек *D* и *B* так, чтобы окружность $(O_2; 4)$ была вписана в угол *DCB* прямоугольника или центр O_2 лежал на биссектрисе угла *DCB*. Эксперимент позволяет выдвинуть гипотезу о том, что условию задачи соответствует прямоугольник со сторонами 8 и 9 (рис. 3 и 4).

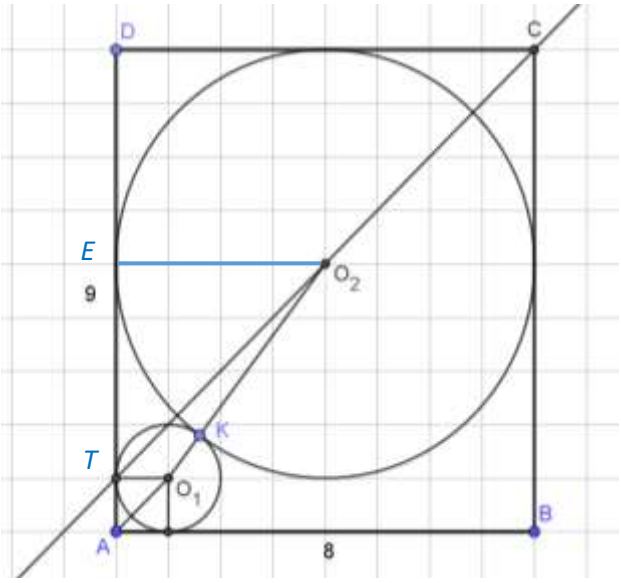

Рисунок 3

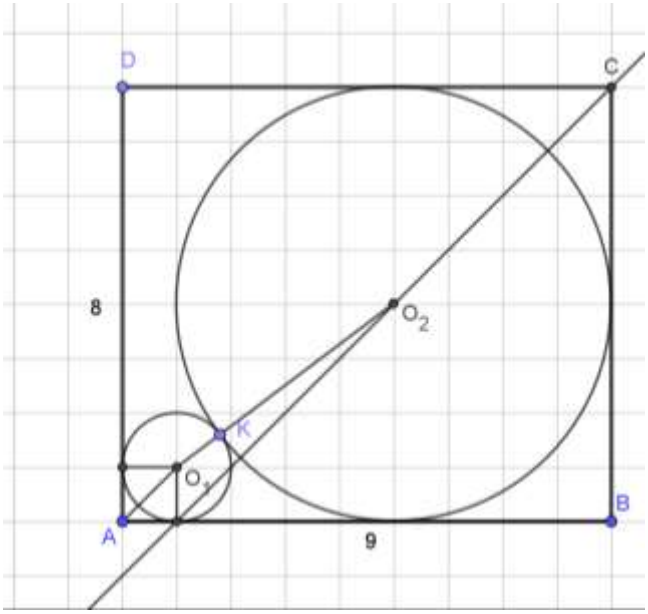

Рисунок 4

Доказательство

Пусть окружность $(O_1; 1)$ вписана в угол *DAB*, окружность $(O_2; 4)$ вписана в угол *DCB* прямоугольника *ABCD*. По условию $O_1O_2 = 5$, при этом $O_1O_2 = R_1 + R_2 = 1 + 4 = 5$, следовательно, окружности касаются. Пусть *K* – точка касания окружностей. Тогда центр O_2 является пересечением прямой O_2K и биссектрисы угла *DCB*.

Т.к. окружность $(O_2; 4)$, вписанная в угол *DCB*, лежит внутри прямоугольника, то одна из его сторон не может быть меньше диаметра этой окружности, т.е. меньшее значение стороны равно 8 см.

Рассмотрим случай, когда *AB* = 8 см, т.е. окружность $(O_2; 4)$ касается сторон *AD*, *DC* и *CB* прямоугольника (рисунок 5). Пусть точки *T* и *E* – точки касания окружностей со стороной *AD*, тогда TEO_2O_1 – прямоугольная трапеция с основаниями $EO_2 = 4$ см, $TO_1 = 1$ см и боковой стороной $O_2O_1 = 5$см. Высота этой трапеции *TE* = 4 см, тогда *AD* = *AT* + *TE* + *ED* = 1 + 4 + 4 = 9 см.

Сторону *AB* можно увеличивать пока сторона *AD* не станет равной диаметру окружности $(O_2; 4)$, вписанной в угол *DCB* (рисунок 6). Таким образом, минимальное значение *AD* равно 8 см, а соответственно *AB* равно 9 см.

Ответ: от 8 см до 9 см.

Задание 6.

Изменяя чертеж к задаче №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии (9 класс)
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5.
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная.
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5.
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа.

Примеры задач:

1) ABCD – *ромб.* Окружность с центром O_1 и радиусом 1 см находится внутри ромба и касается его сторон AB и AD. Окружность с центром O_2 и радиусом 4 см находится внутри ромба и касается сторон DC и CB. В каких пределах могут изменяться длины сторон ромба ABCD, если известно, что расстояние между центрами O_1 и O_2 равно 5 см?
2) ABCD – прямоугольник. Окружность с центром O_1 и радиусом 2 см находится внутри прямоугольника и касается его сторон AB и AD. Окружность с центром O_2 и радиусом 3 см находится внутри прямоугольника и касается сторон DC и CB. В каких пределах могут изменяться длины сторон прямоугольника ABCD, если известно, что расстояние между центрами O_1 и O_2 равно 5 см?